ÉCOLE NATIONALE DES INGÉNIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES
STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE

Année 1976

OPTION DE BIOLOGIE-MATHÉMATIQUES

1re Épreuve de Mathématiques

Durée : 3 heures

Dans tout ce problème, le repère est orthonormé.

I. Étudier les variations de la fonction :

(1) $$x \longrightarrow f(x) = \frac{x}{1+x^2} \operatorname{Log} |x|$$

(La notation Log désignant le logarithme népérien, on pourra la remplacer par ln.)

Pour déterminer le signe de la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$, il est conseillé d'étudier la fonction $g(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2} + \operatorname{Log} x$ pour $x > 0$; indiquer l'allure de la courbe représentative de $g(x)$; en déduire que $g(x)$ s'annule pour deux valeurs de x : $\alpha \in]0, 1[$ et $\beta \in]1, +\infty[$. Calculer les valeurs approchées de α à $1/10^e$ près, de β à une unité près, en utilisant l'extrait de table ci-dessous :

x	3	4	10
Log x	1,0986	1,3863	2,3026

Construire la courbe représentative de $f(x)$.

II. Intégrer l'équation différentielle :

(2) $$x(1+x^2)y' - (1-x^2)y = x$$

après avoir constaté qu'il existe deux réels constants A et B tels que

$$\frac{1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx}{x^2+1} \qquad \forall x \neq 0$$

et après avoir vérifié que la fonction (1) étudiée ci-dessus est une intégrale particulière de l'équation (2). Les solutions de (2) dépendent d'une constante arbitraire. On désigne par $f_K(x)$ la solution prenant la valeur $\frac{K}{2}$ pour $x = 1$ et la valeur $-\frac{K}{2}$ pour $x = -1$. Soit (C_K) sa courbe représentative. Étudier les variations de la fonction $f_K(x)$, en déduire que sa courbe représentative a même allure que celle étudiée au § I. Construire l'ensemble des points où les tangentes aux courbes (C_K) sont parallèles à $x'x$ et, rapportées aux mêmes axes, les courbes (C_{-1}) (C_0) (C_1). Dégager la physionomie de l'ensemble des courbes (C_K).

III. Une droite (D) parallèle à $y'y$ d'équation $x = t$ rencontre chaque courbe (C_K) en M_K.

Montrer que les tangentes en ces différents points aux courbes C_K sont en général concourantes.

Cas d'exception?

Les coordonnées du point de concours T sont des fonctions de t et constituent une représentation paramétrique de la courbe engendrée par T quand (D) se déplace parallèlement à $y'y$.

Construire cette courbe avec précision.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail